На правах рукописи

Кувшинов Дмитрий Рустамович

ЧИСЛЕННОЕ ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЙ В КЛАССЕ НЕАНТАГОНИСТИЧЕСКИХ ПОЗИЦИОННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР

05.13.18 – Математическое моделирование, численные методы и комплексы программ

АВТОРЕФЕРАТ

диссертации на соискание ученой степени

кандидата физико-математических наук

Екатеринбург – 2010

Работа выполнена на кафедре механики и математического моделирования ГОУ ВПО "Уральский государственный университет им. А. М. Горького".

Научный руководитель:	доктор физико-математических наук, профессор Анатолий Федорович Клейменов
Официальные оппоненты:	доктор физико-математических наук, профессор Виктор Иванович Ухоботов
	доктор физико-математических наук, профессор Андрей Федорович Шориков
Ведущая организация:	ГОУ ВПО "Удмуртский государственный университет"

Защита состоится «____» ____________ 2010 г. в _____ на заседании диссертационного совета Д 212.286.10 при ГОУ ВПО "Уральский государственный университет им. А. М. Горького по адресу:
620000, г. Екатеринбург, пр. Ленина 51, комн. 248.

С диссертацией можно ознакомиться в научной библиотеке ГОУ ВПО "Уральский государственный университет им. А. М. Горького".

Автореферат разослан «____» ____________ 2010 г.

Ученый секретарь диссертационного совета,
доктор физико-математических наук, профессор В. Г. Пименов

Общая характеристика работы

Объект исследования и актуальность темы. Объектом исследования диссертации являются численные алгоритмы построения решений в классе неантагонистических позиционных дифференциальных игр двух лиц. При этом рассматриваются два основных типа решений — равновесные решения по Нэшу и решения по Штакельбергу.

Принято разделять теорию игр на теорию *антагонистических игр*, подразумевающих наличие у двух игроков или у двух групп игроков противоположных интересов, и теорию *неантагонистических игр*, в которых интересы игроков хотя и не совпадают, но и не являются взаимно противоположными.

Современный облик теории дифференциальных игр сформировался в значительной степени под влиянием работ отечественных и зарубежных математиков Р. Айзекса[1], Н. Н. Красовского[2,3], Л. С. Понтрягина[4], У. Флеминга.

Крупный вклад в развитие теории дифференциальных игр внесли Э. Г. Альбрехт, М. Барди, В. Д. Батухтин, Е. Н. Баррон, Т. Башар, Р. Беллман, А. Брайсон, Н. Л. Григоренко, Р. В. Гамкрелидзе, В. И. Жуковский, М. И. Зеликин, Н. Калтон, А. Ф. Клейменов, А. Н. Красовский, А. В. Кряжимский, А. Б. Куржанский, Дж. Лейтман, П. Л. Лионс, Н. Ю. Лукоянов, А. А. Меликян, Е. Ф. Мищенко, М. С. Никольский, Г. Ольсдер, Ю. С. Осипов, А. Г. Пашков, В. С. Пацко, Н. Н. Петров, Л. А. Петросян, Г. К. Пожарицкий, Б. Н. Пшеничный, А. И. Субботин, Н. Н. Субботина, А. М. Тарасьев, В. Е. Третьяков, В. И. Ухоботов, В. Н. Ушаков, А. Фридман, Хо-Ю-Ши, А. Г. Ченцов, Ф. Л. Черноусько, А. А. Чикрий, С. В. Чистяков, Р. Эллиот и многие другие.

Первые работы по статическим играм относятся к периоду 30–50-х гг. XX в. и принадлежат таким авторам как Дж. фон Нейман, О. Моргенштерн, Дж. Нэш, Г. фон Штакельберг. Принципиальным вопросом в неантагонистической игре является выбор понятия решения, отвечающего содержанию задачи и опирающегося на соответствующий выбор принципа оптимальности. Обычно рассмат-

[1] *Айзекс Р.* Дифференциальные игры. М.: Мир, 1967.

[2] *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Позиционные дифференциальные игры. М.: Наука, 1974.

[3] *Красовский Н. Н.* Управление динамической системой. М.: Наука, 1985.

[4] *Понтрягин Л. С.* Линейные дифференциальные игры преследования // Мат. сб. 1980. Т. 112, №3. С. 307–330.

риваются равновесное решение по Нэшу[5] и решения по Штакельбергу[6].

Возникновение и становление теории неантагонистических дифференциальных игр относится к концу 60-х — началу 70-х годов XX в., когда в основном было завершено построение теории антагонистических позиционных дифференциальных игр. Это определило то существенное влияние, которое методы и результаты теории антагонистических дифференциальных игр оказали на теорию неантагонистических дифференциальных игр.

Неантагонистическим дифференциальным играм посвящены работы Х. Абу-Кандила, Т. Башара, Н. Н. Данилова, В. И. Жуковского, В. В. Захарова, П. Кардалиге, А. Ф. Клейменова, А. Ф. Кононенко, Дж. Круза, В. Н. Лагунова, Дж. Лейтмана, С. В. Лутманова, О. А. Малафеева, Г. Олсдера, А. Ори, Л. А. Петросяна, А. А. Чикрия, С. В. Чистякова, Г. Янка и других авторов.

Постановки задач, используемые методы и приемы решения неантагонистических дифференциальных игр отличаются большим разнообразием, но общими являются вопросы определения понятия решения, теоремы существования решений, необходимые и достаточные условия оптимальности. Наиболее распространенными типами используемых в литературе решений являются равновесное по Нэшу решение, решение по Штакельбергу, различные варианты кооперативных решений. Следует отметить, что большое число работ посвящено линейно-квадратичным играм.

Среди работ перечисленных авторов существенное влияние на методологию текущего исследования оказали работы А. Ф. Кононенко, Л. А. Петросяна и А. Ф. Клейменова. Так, для игры двух лиц А. Ф. Кононенко[7] устанавливает необходимые условия существования решения по Нэшу в классе позиционных стратегий. Там же устанавливаются достаточные условия, почти совпадающие с необходимыми. В этой же работе описана структура равновесных по Нэшу решений, использующих идею Ю. Б. Гермейера о применении стратегий наказания. Структура решений основана на совместном выборе игроками взаимовыгодной траектории, реализуемой с помощью программных управлений, а также на применении позиционных стратегий, составляющих седловую точку во вспомогательных антагонистических играх, в случае отклонения игрока от выбран-

[5] *Нэш Дж.* Бескоалиционные игры // Матричные игры. М.: Физматгиз, 1961. С. 205–221.

[6] *H. von Stackelberg* The Theory of the Market Economy. London: Hodge, 1952.

[7] *Кононенко А. Ф.* О равновесных позиционных стратегиях в неантагонистических дифференциальных играх // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231, №2. С. 285–288.

ной траектории. Последнее может быть интерпретировано как наказание игрока, уклоняющегося от отслеживания выбранной траектории. При этом факт отклонения партнера каждый игрок устанавливает по информации о текущем фазовом векторе системы. Полученная теорема о достаточных условиях фактически является теоремой существования равновесных по Нэшу решений.

Важным является условие динамической устойчивости решений в неантагонистической дифференциальной игре, введенное Л. А. Петросяном[8].

В работах А. Ф. Клейменова[9] получены следующие результаты, послужившие теоретическим фундаментом предлагаемой диссертации: 1) необходимые и достаточные условия существования равновесных по Нэшу решений и решений по Штакельбергу, 2) описание указанных типов решений в терминах решений нестандартных задач (оптимального) управления.

На этой основе С. И. Осиповым[10] был разработан численный алгоритм построения решений по Штакельбергу в линейной игре двух лиц с цилиндрическими терминальными показателями качества.

В настоящей диссертации на основе предложенной математической модели разработан алгоритм приближенного построения равновесных по Нэшу (и, в частности, неулучшаемых) решений для класса неантагонистических позиционных дифференциальных игр двух лиц с терминальными показателями качества. Произведено обобщение упомянутого алгоритма С. И. Осипова построения приближенных решений по Штакельбергу на более широкий класс систем. При этом построение решений того или иного типа производилось в два этапа: 1) нахождение концов траекторий, порождаемых искомыми решениями, 2) построение траекторий и программных управлений игроков, составляющих решение соответствующих нестандартных задач (оптимального) управления. Общим для этих двух этапов является понятие множества незапрещенных позиций, внутри которого содержатся траектории, порождаемые решениями. Создана программная реализация разработанных алгоритмов и проведен численный эксперимент.

Задачи, формализуемые в рамках теории неантагонистических дифференциальных игр, возникают при описании динамических процессов управления

[8] *Петросян Л. А.* Устойчивость решений в дифференциальных играх со многими участниками // Вестник ЛГУ. 1977. №19. С. 46–52.

[9] *Клейменов А. Ф.* Неантагонистические позиционные дифференциальные игры. Екатеринбург: Наука. 1993.

[10] *Осипов С. И.* О реализации алгоритма построения решений для класса иерархических игр Штакельберга // Автоматика и телемеханика. 2007. №11. С. 195–208.

технологическими и механическими системами, функционирующих в условиях конфликта и неопределенности, а также при анализе экономических ситуаций, когда интересы участников, влияющих на динамику экономической системы, не совпадают и в то же время не являются строго противоположными. Усиление в последнее время интереса к этой области исследований связано также с ростом уровня компьютеризации общества. Сравнительно часто отдельные компоненты автоматизированной компьютерной системы наделяются способностями действовать достаточно автономно, однако при этом необходима определенная координация их действий. Управление такой системой может строиться с применением методов теории неантагонистических дифференциальных игр. Учитывая сказанное, можно заключить, что тема диссертации является актуальной.

Цель диссертационной работы. Целью работы является разработка численных алгоритмов и их программной реализации в задаче построения решений в классе неантагонистических позиционных дифференциальных игр двух лиц.

Методы исследования. Исследования проводятся в рамках подхода, разрабатываемого в научной школе Н. Н. Красовского по оптимальному управлению и дифференциальным играм. Оптимальные стратегии в неантагонистических играх строятся на основе решений соответствующих нестандартных задач (оптимального) управления[9]. Алгоритмы предполагают дискретное представление времени, а также представление множеств в фазовом пространстве в виде многогранников, к которым применяются теоретико-множественные операции: объединения, пересечения, алгебраической суммы и другие. Например, при построении решений игры на плоскости используется представление множеств в виде набора плоских многоугольников, задающих многокомпонентные многосвязные фигуры. Ввиду ограниченной поддержки алгоритмами вычислительной геометрии пространств размерности больше двух, программная реализация предлагаемых алгоритмов ориентируется на решение игр на плоскости.

Заметим, что предлагаемые алгоритмы построения решений в неантагонистических играх используют алгоритмы численного построения решений в антагонистических позиционных дифференциальных играх, которые были разработаны в научных коллективах, руководимых В. Н. Ушаковым и В. С. Пацко. В частности, был использован алгоритм построения множества позиционного поглощения в антагонистической игре с нелинейной динамикой, предложенный в статье А. М. Тарасьева, В. Н. Ушакова и А. П. Хрипунова[11].

Разработанный в диссертации алгоритм нахождения равновесных по Нэшу решений является развитием идеи, заложенной при разработке алгоритма С. И. Осипова[10] построения решений Штакельберга.

Программная реализация опирается на парадигму обобщенного программирования в рамках языка программирования C++. Проектирование основано на идиоме «концепт-модель» и использовании политик для отделения концептуально-независимых компонент[12].

Научная новизна.

1. На основе предложенной математической модели разработан новый численный алгоритм построения приближенных равновесных по Нэшу решений для класса позиционных дифференциальных игр двух лиц с терминальными показателями качества игроков.

2. Новым является также вариант алгоритма из п. 1, предназначенный для построения только неулучшаемых равновесных по Нэшу решений.

3. Алгоритм численного построения решений Штакельберга разработан для более общей постановки, чем в оригинальной работе[10].

4. Создана программная реализация разработанных алгоритмов в виде расширяемой библиотеки программных компонент с применением современных подходов к проектированию программных комплексов.

Теоретическая и практическая ценность. Теоретическая ценность работы заключается в создании нового алгоритма приближенного построения равновесных по Нэшу решений (в том числе, неулучшаемых) для класса позиционных дифференциальных игр с терминальными показателями качества.

Разработанная программная реализация включает в качестве составных компонент целый ряд других алгоритмов, в частности, алгоритмы построения решений по Штакельбергу, построения множеств позиционного поглощения в антагонистической дифференциальной игре, построения множеств достижимости

[11] *Тарасьев А. М., Ушаков В. Н., Хрипунов А. П.* Об одном вычислительном алгоритме решения игровых задач управления // Прикладная математика и механика. 1987. Т. 51. С. 216–222.

[12] *Александреску А.* Современное проектирование на C++. М.; СПб.; Киев: Издательский дом «Вильямс», 2002.

управляемых систем, которые могут быть использованы независимо от основного алгоритма.

Предусмотрен обобщенный интерфейс (в рамках парадигмы обобщенного программирования языка C++) для подключения библиотек алгоритмов вычислительной геометрии, служащих фундаментом разрабатываемых алгоритмов построения решений в позиционных дифференциальных играх.

Предусмотрена возможность дальнейшего расширения программной реализации путем добавления новых алгоритмов построения решений в игре. Возможна модификация всех компонент используемых алгоритмов без нарушения целостности библиотеки.

Структура и объем диссертации. Диссертация состоит из введения, четырех глав, заключения и списка литературы. Общий объем диссертации составляет 125 страниц, библиография включает 95 наименований, иллюстративный материал насчитывает 20 рисунков.

Апробация работы. Основные результаты диссертации обсуждались и докладывались на научном семинаре отдела динамических систем ИММ УрО РАН, научном семинаре кафедры теоретической механики Уральского государственного университета, научном семинаре кафедры дифференциальных уравнений Удмуртского государственного университета, научном семинаре кафедры теории управления и оптимизации Челябинского государственного университета, а также на следующих научных конференциях.

1. Международная научная конференция «Устойчивость, управление и моделирование динамических систем», Екатеринбург, УрГУПС, 15–17 ноября, 2006.

2. The Second International Conference "Game Theory and Management", Graduate School of Management, St. Petersburg State University, 26–27 июня, 2008.

3. International Joint Conferences on Computer, Information, and System Sciences, and Engineering (CISSE), 5–13 декабря, 2008.

4. 40-я Всероссийская молодежная школа-конференция «Проблемы теоретической и прикладной математики», Екатеринбург, 26–30 января, 2009.

5. CAO'09, IFAC Workshop on Control Applications of Optimisation, University of Jyväskylä, Agora, Finland, 6–8 мая, 2009.

6. Всероссийская конференция «Динамические системы, управление и наномеханика», Ижевск, УдГУ, 24–28 июня, 2009.

7. Международная конференция «Актуальные проблемы теории устойчивости и управления», Екатеринбург, ИММ УрО РАН, 21–26 сентября, 2009.

Содержание работы

Во **введении** дается общая характеристика работы, приводятся историко-библиографические сведения, описывается содержание диссертации по главам.

Глава 1 состоит из шести разделов и содержит теоретический материал, служащий фундаментом разрабатываемых алгоритмов.

Раздел 1.1 содержит постановку игровой задачи. Рассматривается позиционная дифференциальная игра двух лиц с фиксированным моментом окончания ϑ и динамикой вида

$$\dot{\mathbf{x}} = f_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + f_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \tag{1}$$

где $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ — фазовый вектор, $\mathbf{u} \in P \subset \mathbb{R}^p$ — управление первого игрока, $\mathbf{v} \in Q \subset \mathbb{R}^q$ — управление второго игрока. Терминальные показатели качества игроков заданы функциями $\sigma_i : \mathbb{R}^n \mapsto \mathbb{R}$. Приведены базовые определения (чистой позиционной стратегии, законов управления игроков, движений). Перечислены основные условия, наложенные на систему, выполнение которых подразумевается в дальнейшем.

В разделе 1.2 рассматриваются антагонистические дифференциальные игры Γ_i, динамика которых описывается уравнением (1). В игре Γ_i игрок i максимизирует свой выигрыш $\sigma_i(\mathbf{x}(\vartheta))$, а игрок $(3-i)$ ему противодействует. При сделанных предположениях в играх Γ_i, $i = 1, 2$, существуют непрерывные цены $\gamma_i(t, \mathbf{x})$ и универсальные оптимальные стратегии, которые используются в дальнейшем при описании структуры решения.

В разделе 1.3 дано определение равновесного по Нэшу решения игры (N-решения). N-решение характеризуется тем свойством, что игрок, уклоняющийся в одиночку от отслеживания этого решения, не может увеличить свой выигрыш. Приводятся необходимые, а также достаточные условия, которым удовлетворяют траектории, порожденные N-решениями. Эти условия сформулированы в терминах решений нестандартной задачи управления, в которой требуется, чтобы функции цены $\gamma_i(t, \mathbf{x}(t))$, $i = 1, 2$, вычисленные вдоль траектории, при $t = \vartheta$ достигали максимума. Приводится структура позиционных стратегий, доставляющих N-решения. Основу этих стратегий составляют решения упомянутой нестандартной задачи управления, которые определяют N-траектории. При выходе позиции из ε-трубки, построенной вдоль N-траектории, вследствие уклонения одного из игроков от отслеживания траектории предусматривается наказание уклониста с помощью оптимальной стратегии в соответствующей антагонистической игре Γ_i.

Раздел 1.4 содержит определение неулучшаемого равновесного по Нэшу решения (P^*-решения). При переходе от P^*-решения к любому другому P^*-решению строгое увеличение выигрыша одного из игроков возможно лишь при строгом уменьшении выигрыша другого.

Раздел 1.5 содержит определение решений по Штакельбергу (S_i-решений, $i = 1, 2$). S_i-решение определяется при введении дополнительных предположений: игрок i, называемый *лидером*, объявляет свою стратегию другому игроку до начала игры, а игрок $(3 - i)$, называемый *ведомым*, зная стратегию игрока i, выбирает рациональную стратегию из условия максимизации своего выигрыша. Приводятся условия на траектории, порожденные S_i-решениями. Они сформулированы в терминах решений нестандартной задачи оптимального управления, в которой лидер максимизирует показатель $\sigma_i(\mathbf{x}(\vartheta))$ на траекториях, вдоль которых функция цены ведомого $\gamma_{3-i}(t, \mathbf{x}(t))$ при $t = \vartheta$ достигает максимума. Такие траектории в работе называются допустимыми.

Заметим, что решения того или иного типа, доставляющие обоим игрокам одни и те же значения выигрыша, в работе считаются эквивалентными.

В разделе 1.6 уточняются условия реализации аппроксимационных движений (ломаных Эйлера), порожденных решениями игры. В частности, полагается, что оба игрока до начала игры выбирают общее разбиение временно́го отрезка $\Delta = \{ t_j \}_1^N$, используемого при построении аппроксимационного движения.

Глава 2 состоит из семи разделов и содержит описание алгоритмов построения решений в неантагонистических играх.

Раздел 2.1 содержит изложение общей идеи предлагаемых в диссертации алгоритмов, которая состоит в следующем.

Как уже было сказано в главе 1, на основе решений нестандартной задачи (оптимального) управления находятся траектории (и программные управления игроков, их порождающие), которые входят в структуру решений неантагонистической игры и, по сути, определяют эти решения. Далее, в разделе доказываются утверждения о допустимых траекториях, составляющие основу моделирования процесса нахождения этих решений. Моделирование производится в геометрических терминах с привлечением понятия максимального стабильного моста в антагонистической игре.

В алгоритмах построения решений всех рассматриваемых типов можно выделить две части. *Первую часть* алгоритма составляет решение задачи поиска концов траекторий, удовлетворяющих условиям в нестандартных задачах (оптимального) управления. *Вторую часть*, названную в диссертации T-алгоритмом, составляет решение задачи восстановления траектории по ее конечной точке. Эта вторая часть по сути не зависит от того, решение какого типа требуется найти, но связана с первой частью понятием множества незапрещенных позиций (каждому результирующему концу траектории соответствует свое множество незапрещенных позиций), которое приводится ниже. Заметим, что в случае поиска решений по Нэшу первая часть состоит в построении набора точек, приближающего множество концов N-траекторий. В таком случае возможен либо прогон второй части для всех полученных точек с тем, чтобы получить аппроксимацию множества N-траекторий, либо выбор некоторых из них в соответствии с каким-то критерием.

Таким образом, первая часть алгоритма определяется типом искомых решений. Предлагаются три варианта: S-алгоритм (поиск конечной точки S_i-траектории), P-алгоритм (построение аппроксимации множества концов всех P^*-траекторий) и N-алгоритм (построение аппроксимации множества концов всех N-траекторий).

Введем следующие дифференциальные позиционные игры сближения-уклонения Γ_i^c, $i = 1, 2$, $c \in \mathbb{R}$, с динамикой (1). В игре Γ_i^c цель игрока i состоит в приведении фазового вектора $\mathbf{x}(\vartheta)$ на множество

$$M_i^c = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \sigma_i(\mathbf{x}) \geqslant c \,\},$$

в то время, как другой игрок препятствует ему. В соответствии с теоремой об альтернативе[2] из теории антагонистических позиционных дифференциальных игр получаем, что для всех позиций $(t, \mathbf{x})$, попавших внутрь максимального стабильного моста W_i^c, в игре Γ_i^c справедливо условие $\gamma_i(t, \mathbf{x}) > c$; в то же время для позиций, лежащих вне моста W_i^c или на его поверхности, справедливо условие $\gamma_i(t, \mathbf{x}) \leqslant c$, что позволяет использовать известные процедуры[2,3,11] построения максимальных стабильных мостов в качестве составной части предлагаемых алгоритмов.

Множество незапрещенных позиций строится как множество всех позиций, через которые проходят траектории системы, исходящие из позиции $(t_0, \mathbf{x}_0)$ и не проходящие через внутренность максимального стабильного моста W_i^c (в случае S-алгоритма) или объединения мостов $W_1^{c_1} \cup W_2^{c_2}$ (в случае P- и N-алгоритмов), для некоторых значений c, c_1, c_2. Работа S-, P- и N-алгоритмов состоит в переборе этих значений и выборе конечных точек (при $t = \vartheta$) искомых траекторий из строимых множеств незапрещенных позиций.

Кроме общего случая динамики (1), в диссертации рассматривались игры с динамиками

$$\dot{\mathbf{x}} = f_0(t, \mathbf{x}) + \mathbf{A}(t, \mathbf{x})\mathbf{u} + \mathbf{B}(t, \mathbf{x})\mathbf{v}, \tag{2}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = f_0(t, \mathbf{x}) + f_1(t, \mathbf{u}) + f_2(t, \mathbf{v}), \tag{3}$$

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} + \mathbf{C}(t)\mathbf{v}, \tag{4}$$

являющимися частными случаями (1). Для этих частных случаев возможно упрощение процесса построения решений. В зависимости от вида правой части динамики выбираются разные алгоритмы построения максимального моста и построения множества незапрещенных позиций.

Раздел 2.2 посвящен алгоритмам численного построения множеств позиционного поглощения (являющихся максимальными стабильными мостами в рассматриваемых постановках задач).

Во-первых, это W^*-алгоритм из статьи[11], используемый для динамик (1), (2). Формально его можно представить в виде следующей попятной процедуры

$$W_{i,N}^c = M_i^c,$$

$$W_{i,j}^c = \bigcap_{\mathbf{v} \in Q} \bigcup_{\mathbf{u} \in P} \mathcal{X}(W_{i,j+1}^c, t_j, t_{j+1} - t_j, \mathbf{u}, \mathbf{v}),$$

$$\mathcal{X}(W, t, h, \mathbf{u}, \mathbf{v}) = \bigcup_{\mathbf{w} \in W} \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} + h(f_1(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) + f_2(t, \mathbf{x}, \mathbf{v})) = \mathbf{w} \,\}.$$

Во-вторых, это W^+-алгоритм, получаемый из W^*-алгоритма путем адаптирования последнего к динамике (3).

W^+-алгоритм основан на применении операций алгебраической суммы и геометрической разности:

$$W_{i,N}^c = M_i^c,$$
$$W_{i,j}^c = \{\, \chi(\mathbf{w}, t_{j-1}, h_j) \mid h_j = t_{j+1} - t_j, \mathbf{w} \in W_{i,j+1}^c \oplus (-h_j F_1(t_j)) \ominus h_j F_2(t_j) \,\},$$
$$\chi(\mathbf{w}, t, h) = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} + h f_0(t, \mathbf{x}) = \mathbf{w} \,\},$$
$$F_1(t) = \{\, f_1(t, \mathbf{u}) \mid \mathbf{u} \in P \,\}, \quad F_2(t) = \{\, f_2(t, \mathbf{v}) \mid \mathbf{v} \in Q \,\}.$$

В разделе 2.3 описаны P-алгоритм и алгоритмы построения множеств незапрещенных позиций (построенные по аналогии с W^*- и W^+-алгоритмами).

В разделе 2.4 описан N-алгоритм, который получен как модификация P-алгоритма. Неулучшаемые равновесные по Нэшу решения могут считаться наиболее привлекательными для игроков среди всех N-решений, поэтому P-алгоритм рассматривается в качестве отдельного алгоритма. Кроме того, поиск только P^*-решений можно производить с существенно более низкими затратами машинного времени, чем поиск N-решений с последующей выборкой из них P^*-решений.

Алгоритм представлен в виде внешнего цикла, поочередно выбирающего целевые выигрыши то первого, то второго игроков, и внутреннего цикла, ищущего максимальный выигрыш одного игрока при фиксированном выигрыше другого игрока методом, напоминающим метод простых итераций. Далее приведен N-алгоритм.

Внешний цикл. Будем считать, что известны $c_i^* \approx \gamma_i(t, \mathbf{x}_0)$. Эти значения можно получить, например, в ходе вычисления S_i-решений S-алгоритмом.

1. Пусть δg^i $(i = 1, 2)$ — значения шагов, используемые при переборе значений выигрышей игроков. Начальные значения целевых выигрышей $g^i = c_i^*$.

2. Пусть $\mathbf{K} = \varnothing$ — строимый набор концов N-траекторий.

3. Пусть $flag_1 = flag_2 = continue$ — флаги действия внешнего цикла (варианты значений: *continue*, *supplement*, *stop*).

4. Для $i = 1, 2$, если $flag_i \neq stop$, то $(flag_i, \mathbf{x}^i) :=$ ВнутреннийЦикл(i, g^i).

5. Если $flag_1 = stop \wedge flag_2 = stop$, либо $\sigma_1(\mathbf{x}^2) < g^1 \wedge \sigma_2(\mathbf{x}^1) < g^2$, то переход к п. 8.

6. Для $i = 1, 2$:

- если $flag_i = supplement$, то
  - пополним $\mathbf{K} \Leftarrow \mathbf{x}^i$,
  - для $1 \leqslant s < \frac{\sigma_{3-i}(\mathbf{x}^i)-g^{3-i}}{\delta g^{3-i}}$ найдем $\mathbf{X}_s^i$ — концы N-траекторий, доставляющих выигрыши $c_i = g^i$ и $c_{3-i} = \sigma_{3-i}(\mathbf{x}^i) - s\delta g^{3-i}$, построив соответствующую этим значениям выигрышей N-трубку $\mathbf{G}^{c_1,c_2}$ и взяв $\mathbf{X}_s^i = \mathbf{G}_\vartheta^{c_1,c_2} \cap \mathbf{M}_1^{c_1} \cap \mathbf{M}_2^{c_2}$, пополним $\mathbf{K} \Leftarrow \mathbf{X}_s^i$,
- если $flag_i \neq stop$, то изменим $g^i := g^i + \delta g^i$.

7. Повтор с п. 4.

8. Возвращаем $\mathbf{K}$, выход.

Внутренний цикл. Пусть зафиксированы индекс игрока i и значение выигрыша c_i игрока i. На $\partial M_i^{c_i}$ можно выбрать точку $\bar{\mathbf{x}}^i$, доставляющую наибольший выигрыш игроку $(3-i)$, обозначим $\bar{c}_{3-i}(c_i) = \sigma_{3-i}(\bar{\mathbf{x}}^i) = \max\limits_{\mathbf{x}\in\partial M_i^{c_i}} \sigma_{3-i}(\mathbf{x})$.

1. Пусть задан параметр точности $\epsilon_{\mathbf{x}}^i$. Положим $\mathbf{x}^i = \bar{\mathbf{x}}^i$, $c_{3-i} = \bar{c}_{3-i}(c_i)$. Построим мост $\mathbf{W}_i^{c_i}$.

2. Если $\mathbf{W}_{i,\vartheta}^{c_i} = \varnothing$, то возвращаем (*stop*, *любая точка*).

3. Если $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{W}_{i,\vartheta}^{c_i}$, то возвращаем (*continue*, *любая точка*).

4. Строим мост $\mathbf{W}_{3-i}^{c_{3-i}}$, предварительно добавляя вершину $\mathbf{x}^i$ в границу аппроксимации целевого множества $\partial\mathbf{M}_{3-i}^{c_{3-i}}$.

5. Если $\mathbf{x}_0 \in \mathbf{W}_{3-i,\vartheta}^{c_{3-i}}$, то возвращаем (*supplement*, $\mathbf{x}^i$).

6. Строим множество незапрещенных позиций $\mathbf{G}^{c_1,c_2}$, используя $\mathbf{W}_i^{c_i}$ и $\mathbf{W}_{3-i}^{c_{3-i}}$. Положим $\mathbf{D} := \mathbf{G}_\vartheta^{c_1,c_2} \cap \mathbf{W}_{i,\vartheta}^{c_i}$.

7. Если $\mathbf{D} \neq \varnothing$, то
   - выберем $\mathbf{x}_*^i = \arg\max\limits_{\mathbf{x}\in\mathbf{D}} \sigma_{3-i}(\mathbf{x})$;
   - если $|c_{3-i} - \sigma_{3-i}(\mathbf{x}_*^i)| \leqslant \epsilon_{\mathbf{x}}^i$, то возвращаем $(supplement, \mathbf{x}_*^i)$;
   - $c_{3-i} := \sigma_{3-i}(\mathbf{x}_*^i)$; $\mathbf{x}^i := \mathbf{x}_*^i$, повтор с п. 4;

8. Иначе возвращаем ($stop$, *любая точка*) — останов внешнего цикла для игрока i.

В разделе 2.5 описан алгоритм построения решений по Штакельбергу.

Раздел 2.6 посвящен восстановлению траектории по найденной конечной точке (T-алгоритму). T-алгоритм основан на обращении во времени процедуры построения множества незапрещенных позиций, в которой вместо вычитания моста (мостов) используется пересечение с найденным ранее для этой конечной точки множеством незапрещенных позиций. Таким образом можно построить сразу пучок возможных траекторий.

В разделе 2.7 дан обзор алгоритмов вычислительной геометрии, реализующих базовые операции над множествами, используемые предлагаемыми алгоритмами построения решений.

Глава 3 состоит из трех разделов и посвящена программной реализации разработанных алгоритмов.

В разделе 3.1 описан общий подход к построению библиотеки программных компонентов, характерный для современных библиотек на языке C++.

Раздел 3.2 содержит общий вид структуры программной реализации, представленный в виде перечисления основных концептов и их моделей, разбитых на группы с указанием заголовочных файлов, в которые помещены соответствующие определения. Даны краткие описания основных компонентов. Парадигма обобщенного программирования позволяет достигнуть высокого уровня гибкости, способствующее дальнейшему обобщению разработанного набора шаблонов (классов и функций).

Раздел 3.3 описывает выбранный автором подход к распараллеливанию реализованных алгоритмов. Используется глобальный диспетчер задач, управляющий группой потоков-исполнителей и очередью задач, ожидающих назначения одному из потоков-исполнителей.

Глава 4 состоит из двух разделов и содержит два примера численного расчета.

Первый пример с линейной динамикой размещен в разделе 4.1. Пусть имеется материальная точка единичной массы, движимая в плоскости (ξ_1, ξ_2) двумя игроками. Силы, выбираемые игроками, суммируются.

$$\ddot{\xi} = \mathbf{u} + \mathbf{v}, \quad \dot{\xi}(0) = \dot{\xi}_0, \quad \xi(0) = \xi_0.$$

Пусть зафиксированы ограничения на выбор управлений игроками: $\|\mathbf{u}\| \leqslant \mu, \|\mathbf{v}\| \leqslant \nu$. Каждый из игроков стремится привести систему в конечный момент игры $t = \vartheta$ как можно ближе к своей целевой точке $a^{(i)}$ $(i = 1, 2)$. После применения замены[2] рассматривается система второго порядка.

$$\dot{\mathbf{x}} = (\vartheta - t)(\mathbf{u} + \mathbf{v}), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 = \xi_0 + \vartheta\dot{\xi}_0.$$

Поскольку случай $\mu = \nu = 1$ рассматривался аналитическими методами[9], то это дает возможность определить погрешность численного решения. В диссертации приведена погрешность вычисления концов P^*-траекторий для одного набора параметров.

Для иллюстрации работы N-алгоритма были выбраны следующие значения параметров игры: $\vartheta = 2$, целевые точки игроков $a^{(1)} = (-2.5, 4.5)$, $a^{(2)} = (3.5, 3.5)$, $\xi_0 = (-0.5, -0.5)$, $\dot{\xi}_0 = (0.5, 0.25)$. Отсюда получаем $\mathbf{x}_0 = (0.5, 0)$. Использовалось разбиение временного отрезка с постоянным шагом 0.005. Были выбраны шаги $\delta g^1 = \delta g^2 = 0.08$.

На рис. 1 и 2 приведены результаты численного расчета для значений $\mu = 1.3$, $\nu = 0.7$. На рис. 1 черными точками показана аппроксимация множества концов всех N-траекторий, на рис. 2 представлено отображение этого множества в плоскость (I_1, I_2) значений выигрышей игроков. Серой ломаной и на рис. 1, и на рис. 2 соединены (и таким образом выделены) концы P^*-траекторий. Кроме того, на рис. 1 приведены пять P^*-траекторий (в координатах (ξ_1, ξ_2), полученные интегрированием управлений, вычисленных при расчете траекторий в координатах (x_1, x_2)). Параметр точности $\epsilon^i_{\mathbf{x}}$ был выбран равным $5 \cdot 10^{-4}$. Кроме того, на каждом шаге построения множества незапрещенных позиций производилось прореживание контуров с удалением ребер длиной менее 10^{-4}.

Второй пример (раздел 4.2) описывается нелинейной динамикой

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -\dfrac{x_1 + 2}{x_1 + 1}x_1 + x_2 + u + 3v, \\ \dot{x}_2 = x_1 - \dfrac{x_2 + 2}{x_2 + 1}x_2 + 3u + v, \end{cases}$$
$$\mathbf{x}_0 = (3, 2).$$

Ограничения на управления игроков: $|u| \leqslant 1$, $|v| \leqslant 1$.

Цели игроков состоят в максимизации следующих показателей:

$$I_1(u(\cdot), v(\cdot)) = \sigma_1(\mathbf{x}(\vartheta)) = -1 - 0.02x_1^2(\vartheta) + \ln(x_1(\vartheta) + x_2(\vartheta)),$$
$$I_2(u(\cdot), v(\cdot)) = \sigma_2(\mathbf{x}(\vartheta)) = -1 - 0.02x_2^2(\vartheta) + \ln(x_1(\vartheta) + x_2(\vartheta)).$$

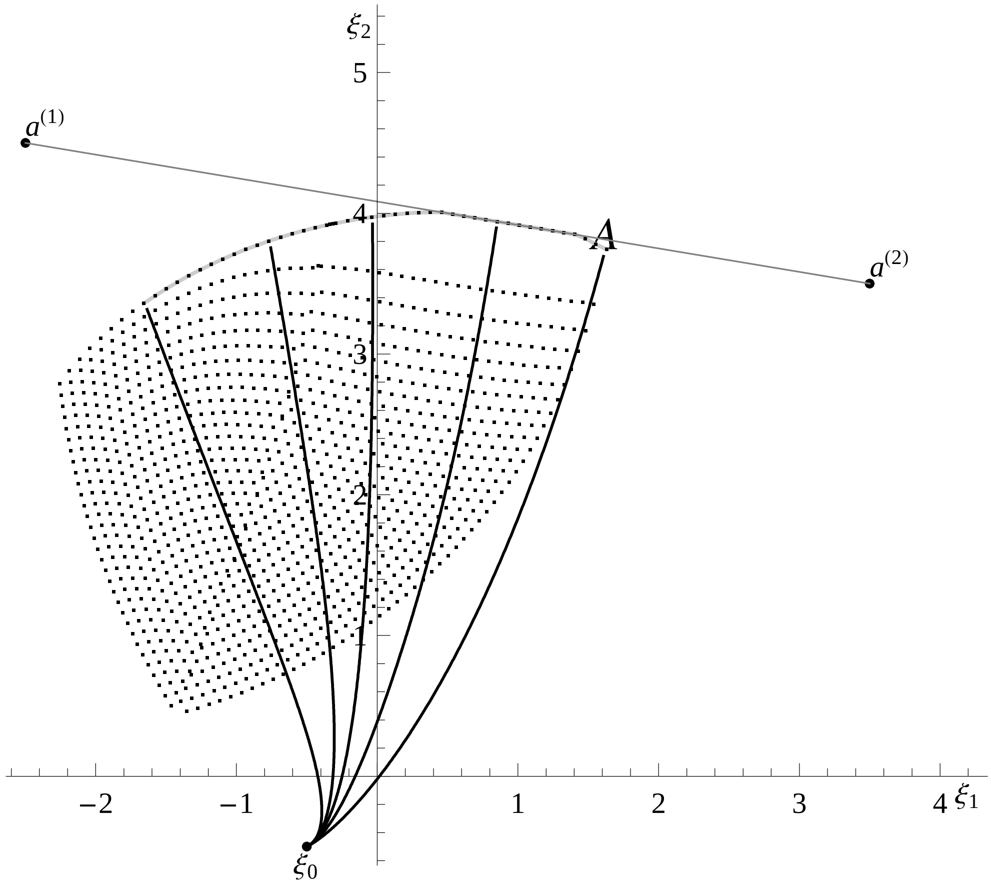

Рис. 1. Множество концов N-траекторий, $\mu = 1.3, \nu = 0.7$.

Уравнения движения и показатели игроков взяты из статьи Красовского Н. А., Тарасьева А. М.[13], однако там решалась другая задача и, к тому же, на полубесконечном интервале времени.

Параметры точности: шаг по времени $h = 2 \cdot 10^{-3}$, минимальная длина ребра $4 \cdot 10^{-3}$, длина ребра ломаной, аппроксимирующей линию уровня показателя качества 0.2, шаги по выигрышам $\delta g_0^1 = \delta g_0^2 = 0.045$, $\delta g_{\min}^1 = \delta g_{\min}^2 = 3 \cdot 10^{-3}$, критерий останова внутреннего цикла $\epsilon_{\mathbf{x}}^1 = \epsilon_{\mathbf{x}}^2 = 2 \cdot 10^{-3}$.

На рис. 3 показано множество концов допустимых траекторий, полученных при поиске S_1-решения (конец S_1-траектории отмечен символом S_1). На рис. 4 показано множество концов N-траекторий, серой ломаной соединены (и таким образом выделены) концы P^*-траекторий. На рис. 5 представлено отображение этого множества в плоскость (I_1, I_2) значений выигрышей игроков.

[13] *Красовский Н. А., Тарасьев А. М.* Поиск точек максимума векторного критерия с декомпозиционными свойствами // Труды ИММ УрО РАН. 2009. Т.15 №4. С.167–182

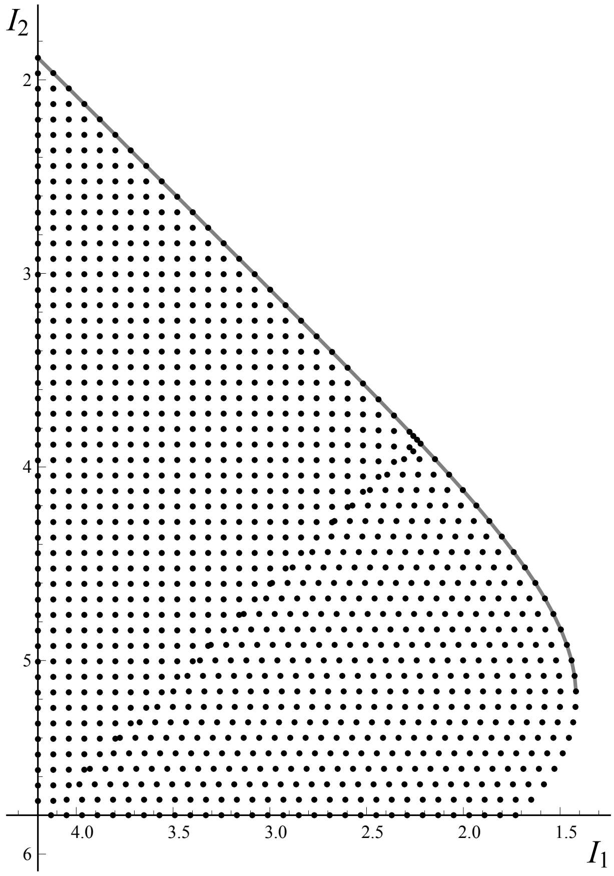

Рис. 2. Выигрыши на N-решениях, $\mu = 1.3$, $\nu = 0.7$.

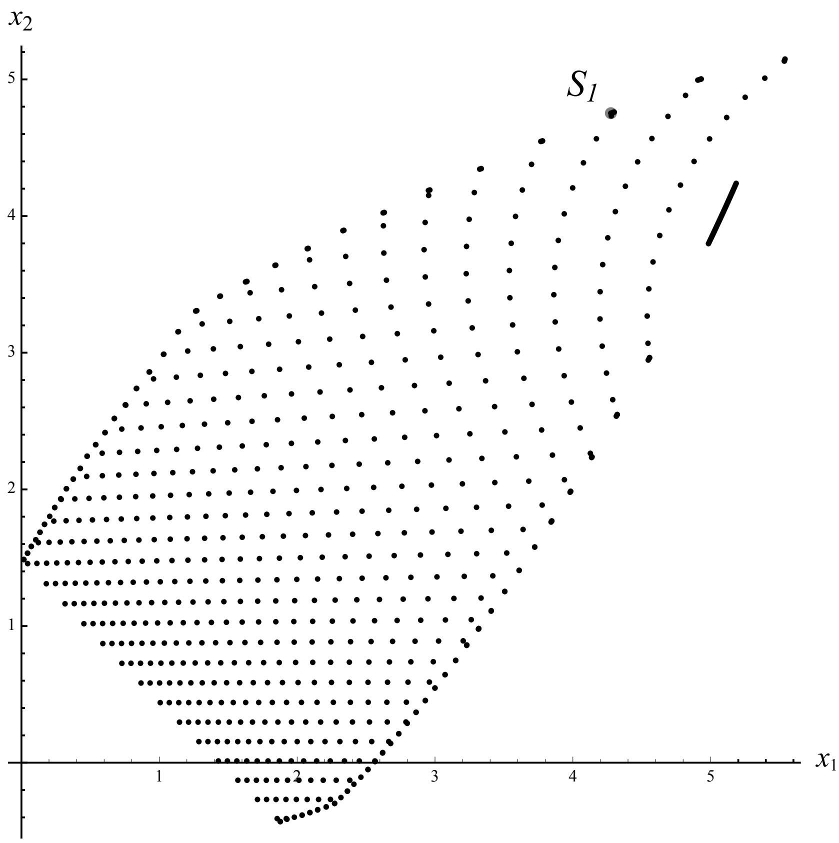

Рис. 3. Множество концов S_1-допустимых траекторий.

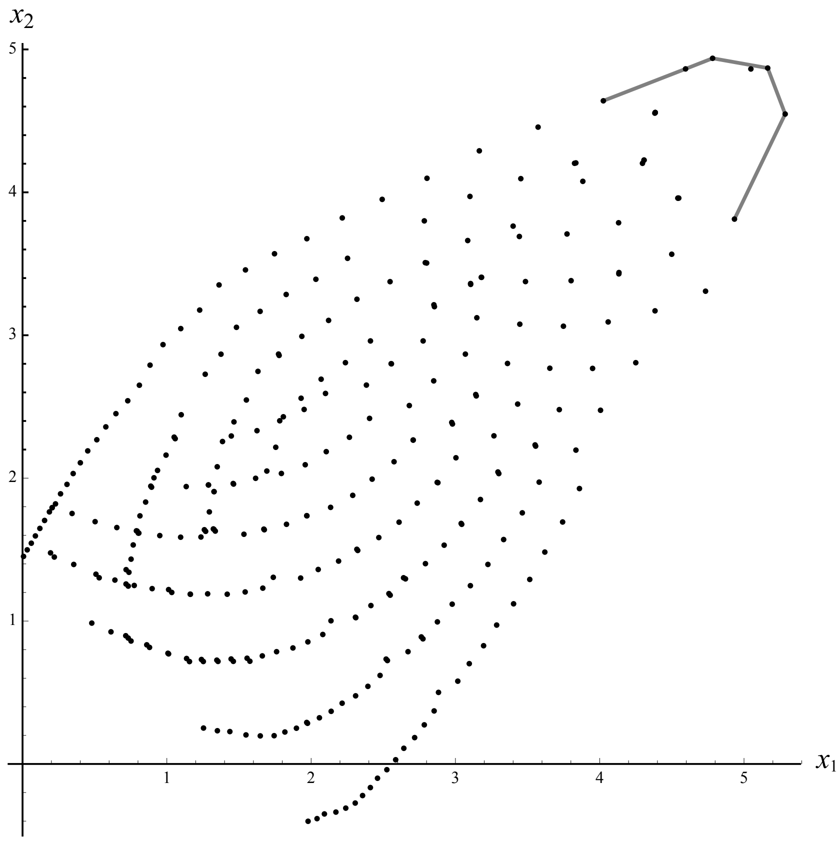

Рис. 4. Множество концов N-траекторий.

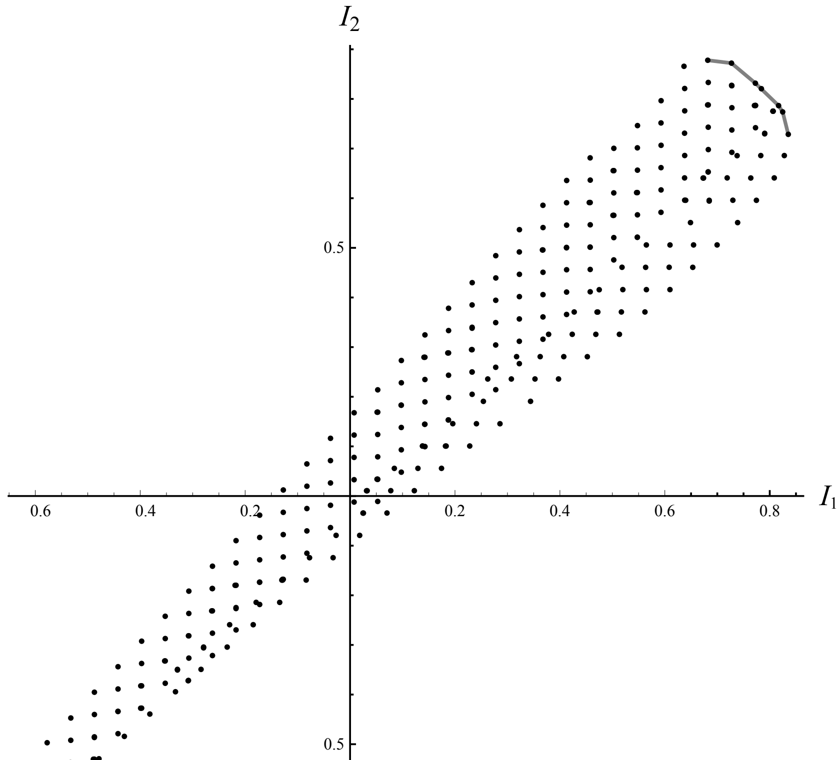

Рис. 5. Выигрыши на N-решениях.

Основные результаты

Таким образом, в диссертации получены следующие результаты.

1. На основе предложенной математической модели разработан новый алгоритм численного построения равновесных по Нэшу решений для класса нелинейных позиционных дифференциальных игр с терминальными показателями качества игроков.

2. Разработан алгоритм, строящий только неулучшаемые равновесные по Нэшу решения с меньшими затратами машинного времени и памяти (по сравнению с алгоритмом из п. 1).

3. Разработана программная реализация алгоритмов построения равновесных по Нэшу решений и решений Штакельберга в виде расширяемой библиотеки программных компонент с применением современных подходов к проектированию программных комплексов.

4. Показана работоспособность разработанных алгоритмов и их программных реализаций на расчете двух примеров, один из которых ранее изучался аналитическими методами.

Список публикаций

Основные результаты диссертации опубликованы в следующих работах.

Статьи, опубликованные в ведущих рецензируемых научных журналах и изданиях, определенных ВАК:

1. *Клейменов А. Ф, Осипов С. И., Черепов А. С., Кувшинов Д. Р.* Численное решение одной иерархической дифференциальной игры двух лиц. // Известия Уральского ун-та. — Екатеринбург, 2006. — №46 (Математика и механика. Вып. 10). — С. 160–170.

2. *Кувшинов Д. Р.* Алгоритм численного построения решений по Нэшу в позиционной дифференциальной игре двух лиц. // Вестник Удмуртского ун-та. — 2009, № 3 (Математика. Механика. Компьютерные науки). — С. 81–90.

3. *Клейменов А. Ф, Кувшинов Д. Р., Осипов С. И.* Численное построение решений Нэша и Штакельберга в линейной неантагонистической позиционной дифференциальной игре двух лиц. // Труды ИММ УрО РАН. Том 15 № 4. — Екатеринбург: 2009. — С. 120–133.

Другие публикации:

5. *Кувшинов Д. Р.* Демонстрация численного алгоритма построения решения Штакельберга для класса неантагонистических дифференциальных игр на примере задачи, имеющей аналитическое решение. // Устойчивость, управление и моделирование динамических систем: Сб. научн. трудов под научн. ред. Г. А. Тимофеевой. Материалы Международн. научн. конференции (15–17 нояб., 2006). — Екатеринбург: УрГУПС. — №54 (137). — 2006. — С. 50.

6. *Kleimenov A. F., Osipov S. I., Kuvshinov D. R.* Numerical Construction of Nash and Stackelberg trajectories in a linear positional differential game. // Межд. Конф. «Дифференциальные уравнения и топология», посв. 100-летию со дня рождения Л.С.Понтрягина (17 — 22 июня 2008). Тез. докл. — М.: 2008. — С. 259.

7. *Kleimenov A. F., Osipov S. I., Kuvshinov D. R.* Numerical Construction of Nash Trajectories in a Two-Person Non Zero-sum Linear Positional Differential Game. // The 2^{nd} Int. Conf. "Game Theory and Management". Abstracts. / Ed. by L. A. Petrosjan, N. A. Zenkevich. — St.-Petersburg: 2008. — Pp. 98–101.

8. *Кувшинов Д. Р.* Численное построение нэшевских решений в линейной позиционной дифференциальной игре двух лиц. // Тез. докл. 40-й Всероссийской молодежной шк.-конф. «Проблемы теоретической и прикладной математики» (26 — 30 янв. 2009). — Екатеринбург: 2009. — С. 236–240.

9. *Kleimenov A. F., Osipov S. I., Kuvshinov D. R.* A Numerical Construction Algorithm of Nash and Stackelberg Solutions for Two-Person Non-Zero Sum Linear Positional Differential Games. // CAO'09, IFAC Workshop on Control Appl. of Optimisation (May 6 — 8, 2009). Abstracts / Univ. of Jyväskylä. — Agora, Finland: 2009. — Pp. 28–29.

10. *Kleimenov A. F., Osipov S. I., Kuvshinov D. R.* Nash and Stackelberg Solutions Numerical Construction in a Two-Person Nonantagonistic Linear Positional Differential Game. // Contributions to Game Theory and Management. Vol. II The Second Int. Conf. "Game Theory and Management" (June 26–27, 2008), St.Petersburg, Russia. Collected papers. / Ed. by L.A. Petrosjan and N.A. Zenkevich. — St.Petersburg: 2009. — Pp. 205–219.

11. *Kuvshinov D. R.* Nash Trajectories Numerical Construction in a Two-Person Non-zero Sum Nonlinear Positional Differential Game. // The 3^{rd} Int. Conf. "Game Theory and Management" (June 24 -– 26, 2009). Abstracts. / Ed. by L.A. Petrosjan and N.A. Zenkevich. — St.Petersburg: 2009. — Pp. 146–149.

12. *Кувшинов Д. Р.* Алгоритм численного построения решений по Нэшу в позиционной дифференциальной игре двух лиц. // Тез. докл. Всероссийской конф. «Динамические системы, управление и наномеханика» (24–28 июня, 2009). — Ижевск: 2009. — С. 42.

13. *Клейменов А. Ф, Кувшинов Д. Р., Осипов С. И.* Численное построение решений в неантагонистической дифференциальной игре двух лиц. // Тез. докл. Международн. конф. «Актуальные проблемы теории устойчивости и управления» (21–26 сент., 2009). — Екатеринбург: 2009. — С. 84–86.

14. *Kleimenov A. F., Osipov S. I., Kuvshinov D. R.* A Numerical Construction Algorithm of Nash and Stackelberg Solutions for Two-person Non-zero Sum Linear Positional Differential Games. // Innovations and Advances in Computer Sciences and Engineering. Ed. by T. Sobh. — Springer Netherlands: 2010. — Pp. 249–254.